学習システム促進研究センター
『学習システム研究』第 2 号　2015(pp.71-78)

数学者による活動分析

―数学科教師教育への示唆を目指して―

袴田　綾斗・寺垣内　政一・影山　和也

本稿の目的は，ある数学者による研究論文を分析することによって，専門家としての数学者の活動の一端を理解し，数学科教師教育への示唆を得ることである。

検討の結果，数学者による活動は，演繹的に論理を詰めていくだけでは無く，仮説としての予想を経験的帰納的にたてて検証していく部分も多いことが指摘された。学問としての数学の研究論文を学部学生に与えることは，その読解に相当の数学的素養を必要とすることから必ずしも適切とは限らない。しかしながら，実際の数学者による研究活動や，研究論文として提出された成果の導出過程を追体験すること，なぜその研究論文がかかれねばならなかったのかという知識構成の必要性の感得など，数学科教師教育に対しても扱い方によっては十分に価値があることがわかった。

キーワード：読解，数学，帰納と演繹，知識構成

Analysis of Mathematician's Activities:

Implications for Mathematics Teacher Education

Ryoto Hakamata, Masakazu Teragaito and Kazuya Kageyama

The purpose of this paper is to have implications for mathematics teacher education through analysis of mathematician's activities by reading an academic paper.

The result suggests that a mathematician does not only think deductively but also take an inductive and empirical approach while forming hypotheses.　It isn't always appropriate to provide academic mathematics papers for undergraduate students because an essential background is needed to read them.　However, to read an academic paper could be enough worth for students in mathematics teacher education because they could follow a mathematician's research process including submitting an academic paper and reflect reasons to write the paper.

Key Words: Reading, Mathematics, Induction and Deduction, Construction of Knowledge

１　問題の所在

学校教育における数学科には，親学問としての数学があるといわれる。しかし，たしかにそれは教科内容の理論基盤であるが，両者の関係はそれほど単純ではない。たとえば，教科としての数学は学問としての数学を易しくしたもの，あるいは基礎的な部分を抜き出して構成されるものではないし，教科内容の改訂の際も最前線の数学研究の成果が必ずしも反映されない事実をとってみても明らかである。では，両者の違いは具体的にどこにあるのか。この点について，数学科教師教育を念頭に置いて追究したい。なお，以下では，学校教育における算数・数学のことを学校数学，学問としての数学を学問数学と呼んで区別することにする。

２　研究の目的と方法

（１）研究の目的

本稿の目的は，専門家としての数学者の活動，特に研究論文の構成や構造に注目し，数学教師教育への示唆を得ることである。

（２）研究の方法

Teragaito（2013）をとりあげ，その論文の構成と構造について分析する。その結果について，対象論文の執筆者との交流を経て，数学者の活動からみた，数学教師教育への示唆を得る。

３　結果

本節では，まず論文の概要を章構成に基づいてまとめ，次に「問い」と「答え（主張）」の観点から構造化する。数学の研究論文であるから多くの専門用語が含まれている。しかし，それらの用語や概念を本稿で用いることは，厳密性の確保にはつながるが，論文の趣旨が伝わらなくなってしまう。したがって，多少の厳密性の欠落はいとわず，必要最低限の用語のみを用いることにする。

（１）対象論文の構成

まず，対象論文の構成は次のようになっている。

1. Introduction
2. Fundamental group
3. Normal families of left-ordering
4. An ordering of torus knot group
5. Proofs

1. Introduction

第一節は論文全体における導入部であり，先行研究のレビューを含む研究の背景や動機，そして論文の目的等が記述されている。また，必要となる概念の定義や，論文の主結果である定理（Theorem 1.1）もここに載せられている。

2. Fundamental group

第二節では left-orderable であることを示したい基本群がどのような表示を持つのかを明らかにしている。基本群とは位相幾何学（トポロジー）における古典的な分析道具の一つである。すなわち，多様体（ここでは大まかに言えば 3 次元の図形）の構造を分析するためのツールである。この研究では，その道具そのものの構造に着目している。その構造が left-ordering（左不変順序）と呼ばれるものであり，対象論文の中では，どのようなときに基本群が左不変順序という構造を許容するか，という問いを掲げている。第二節では順序構造の許容可能性を調べるため，基本群の表示（数式での記述）を行っている。

3. Normal families of left-ordering

第三節では後の議論に必要となる道具を導入している。つまり，部分的に得られた左不変順序の情報から全体の順序構造を得るための方法を準備している。

4. An ordering of torus knot group

第四節では先行研究の詳細な分析から，部

分的な順序構造の情報を得ることに成功している。また，第三節で導入した道具の適用可能性を確認するために，いくつかの補題を示している。

5. Proofs

第五節は定理 1.1 の証明をしている。これまでの議論で必要な道具は準備されているので，証明自体は確認程度の重みしかない。

（２）対象論文の構造

本小節では，対象論文から「問い」とそれに対応する「答え（主張)」を抽出し，この観点から論文を構造化する。はじめに，主な問い（MQ）と主な主張（MA）を抽出すると，以下のようになる。

MQ : 双曲的なツイスト結び目に対して，係数 4 のデーン手術は left-orderable な基本群をもつ多様体を生み出すか（より根源的な問いとして「Clay-Lidman-Watson [3]による八の字結び目に関する結果を，他の結び目に一般化することができるか」というものが考えられる)。

MA : 双曲的なツイスト結び目に対して，係数 4 のデーン手術は left-orderable な基本群をもつ多様体を生み出す。

ここで結び目とは，3 次元空間内の単純閉曲線のことを指す。イメージとしては，図 1 のような空間に浮かぶ閉じたひものことである。また，双曲的なツイスト結び目とは，結び目のあるグループを指している。

基本群は多様体の情報から得られるものであり，結び目そのものには対応しない。結び目と基本群を関連づけるのがデーン手術という操作である。簡潔に言えば，デーン手術とは結び目から 3 次元多様体を作りだす操作のことである。対象論文の研究は，結び目から

図１：結び目のイメージ（左は三つ葉結び目，右は八の字結び目）

デーン手術により多様体を作り，その多様体の情報から得られる基本群についての順序構造の許容性を議論している。

論文の内容を「問い」の観点からさらに分析すると，MQ を解決するためにいくつかの補助的な問い（SQs）を設定していることが示唆される。それらを抽出すると，以下のようになる。

SQ_1 : 双曲的なツイスト結び目から，デーン手術によって得られる 3 次元多様体を M とする。このとき，M の基本群の表示はいかなるものか。

SQ_{11} : M を構成しているピース M_1（クラインボトル上の twisted I-bundle）に対して，その基本群の表示はいかなるものか。

SQ_{12} : もう一方のピース M_2（トーラス結び目の外部空間）に対して，その基本群の表示はいかなるものか。

SQ_{13} : M_1 と M_2 の結合（∂M_1 と ∂M_2 の張り合わせ）はいかなるものか。

SQ_2 : M の基本群が許容する左不変順序はいかなるものか。

SQ_{21} : M_1 の基本群が許容する左不変順序はいかなるものか。

SQ_{22} : M_2 の基本群が許容する左不変順序はいかなるものか。

SQ_{23} : 各々の順序構造の張り合わせは可能か。

ここで，SQ_2 はそれ自体が MQ に相当するが，わかりやすさのために補助的な問いとしても設定した。これらの補助的な問いは次のように（ほぼ線形的に）構造化されうる。

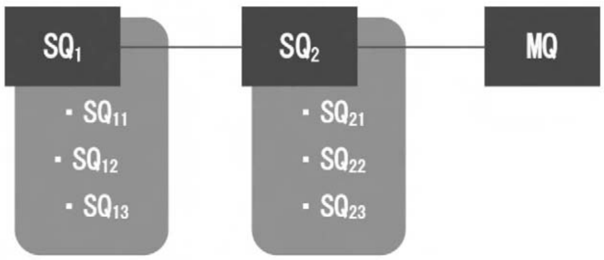

図２：問いの構造

問い（に対応する主張：SAs）に着目して再び論文構成をみると，次のような構造になっていることが分かった。

図３：論文の構造

（３）対象論文の意義

１．キーワードから読み取る

数学の研究論文には執筆者によりキーワードが設定されるのが普通であり，対象論文には三つのキーワードが設定されている。left-ordering（左不変順序），twist knot（ツイスト結び目），Dehn surgery（デーン手術）である。ここでは，ツイスト結び目とデーン手術という概念から論文の位置づけについて考察する。

対象論文の研究内容は，低次元トポロジー，特に 3 次元多様体論に位置付くものである。一方で，ツイスト結び目（を含む結び目）は，それ自体では 3 次元多様体ではない。前述のように，この結び目と 3 次元多様体論を強く関連させているのがデーン手術である（デーン手術は結び目に対する操作のことであるが，簡潔に言えば結び目から 3 次元多様体を作る操作である）。さらに，結び目のデーン手術によって，非常に多くの 3 次元多様体を作り出せることが知られている。これらのことから対象論文の研究内容は，結び目理論およびデーン手術を用いた 3 次元多様体論と位置付けることができる。

２．領域から読み取る

数学においては，（他の自然科学と同様に）領域が細分化されており，各研究がどの領域に属しているかということは，社会科学や人文科学における研究に比べてはっきりしている。

対象論文の研究がどの領域に属しているかということは，その執筆者の使用概念からも窺えるが，数学の研究論文においては AMS subject classification による分類がなされている（AMS はアメリカ数学会のことである）。対象論文においても「低次元トポロジー―3 次元球面内の結び目および絡み目」と「代数的順序構造―順序群」が指定されている。大まかに言えば，これらは前者が幾何における領域，後者が代数における領域である。また，先ほどのキーワードについて言えば，ツイスト結び目とデーン手術が前者に，順序構造が後者に属するものである。したがって，対象論文の研究内容は二つの領域にまたがったものであると考えられる。

しかし，上記の二つの領域の関連は，近年まで全く見出されていなかった。より厳密に言えば，トポロジーにおいて群は非常に重要なツールであったが，それ自体の順序構造を考察するような研究はほとんどなされてこなかった。ところが 2011 年の国際学会において，それらの間の強い関連性を示す予想（L 空間予想）が発表された（Boyer-Gordon-Watson [2]）。これは，L 空間というトポロジー（幾何領域）において非常に複雑で難解な概念に対して，それに対応する基本群の順序構造（代数領域）を考えることで，比較的容易に概念

を特徴付けできる，という旨の予想である。
対象論文の内容は，この予想をサポートするエビデンスを提示している。具体的には，予想が成り立つと仮定して導かれる結論の一つに対して，それが真であることを証明するという作業を行っている。
ここで示唆的なのは，数学研究においても経験的・帰納的な考え方，あるいは他の自然科学に見られるような仮説演繹的な方法がとられており，それも価値ある活動とされていることである。
数学における予想とは，真であることが期待されているものの，まだ証明されていない命題のことである。ここで「期待される」というのは，まさに「経験的・帰納的にそう思われる」という意味である。数学の歴史をみてみれば，予想の果たす役割は非常に重要であることは明らかで（フェルマー予想，ポアンカレ予想，リーマン予想，…），実際の数学者の研究活動には演繹的な推論ではないものも多く含まれていることがわかる。
また，対象論文の目的は，上記予想のエビデンスを提示することである。論文においては「P ならば Q」という形の予想に対して，実際に P であるものをとってきて，それが Q でもあるということを示している。これは例えば「三角形ならば内角の和が 180°に等しい」という予想に対して，直角三角形をとってきてその内角が 180°になることを示す，という作業と同型である。この例からもわかるように，数学においてエビデンスを示すという作業は，それ自体では予想を証明したことにはならない。しかし，論文の研究内容がそうであるように，数学においても他の自然科学と同様に，仮説（予想：P ならば Q）から演繹的推論によって導かれる現象（a は P であるから，a は Q でもある）に対して，それが成り立つことを示すことで仮説（予想）の確からしさが検証されるとしている。
以上のように，数学者の研究活動は演繹的な推論だけではなく，帰納的な推論や，経験に基づく仮説形成，あるいは実験などが含まれている。
本小節について長くなったのでまとめておく。対象論文の研究は，3 次元多様体論（幾何領域）と群の順序構造（代数領域）にまたがる領域に位置付き，これは近年まで行われていなかった新規性のある研究である。この二つの領域間の関連は L 空間予想によって示されたものであり，対象論文はこの予想をサポートするエビデンスの提示を行っている。このことから示唆されることとして，数学の研究活動には経験的・帰納的な側面もあり，それにも価値があるということがある。

4　数学者の研究過程と学習過程

（１）研究過程

対象論文は，先行研究として一本の論文（Clay-Lidman-Watson [3]）を挙げている。先行研究の主旨も，基本的には対象論文のものに等しく，L 空間予想に対するエビデンスを提示するものとなっている。上の例に倣って L 空間予想を「P ならば Q」という命題であるとすると，先行研究は P であるような対象 a_1 をとってきて，それが Q でもあるということを示している。これに対し対象論文では，先行研究の結果を一般化することに成功している。つまり，P であるような（a_1 を含む）無限に多くの対象 $a_1, a_2, a_3, \dots$ をとってきて，それらがすべて例外なく Q でもあることを示している。
一般化という操作は，数学においてもっとも正統的な方法の一つである。したがって，先行研究が a_1 のみの分析にとどまり，そこからの一般化がなされていないということは，先行論文の執筆者が一般化について考えていなかったことを意味しない。むしろ，一般化を試みた（あるいは一般化が念頭にはあった）が，それが容易でなかったと解釈する方が妥当であると考えられる。よって，対象論文の

研究は先行研究が暗黙的に抱えていた課題を突破したといえる。

先行研究においては，a_1 が Q であることを示す際に，a_1 を二つのピースに分けて分析している（厳密には，a_1 から係数 4 のデーン手術で得られる 3 次元多様体をピースに分けている）。このとき，それぞれのピースの構造は，すでによく知られているものであった。したがって，あとはそれらのピースをうまく張り合わせればよく，この張り合わせの方法も既知であったので，先行研究では結果を得ることに成功している。一方で対象論文においては，$a_1, a_2, a_3, \ldots$ について Q であることを示す必要があった。先行研究と同様にそれぞれを二つのピースに分けて分析するという方法をとっているが，ここで課題となったのは，二つのピースのうち一方の構造が不明だったことである。対象論文では，この課題を解決するために Navas[4]の結果を利用している。これにより不明だった方の構造が分析可能になり，先行研究の結果を一般化することに成功している。

以上のことより執筆者の研究活動として想起されることをまとめると，以下のような流れになる。

① ある予想（ここでは「P ならば Q」）を学会や論文等で知る。
② P であるものをとってきて，それが同時に Q でもあることを示せば，予想をサポートすることができる，ということを考える。
③ 先行研究にあたり，何が既知で何が未知なのかを調べる。
④ a_1 については結果が出ていることから，より多くの対象へと結果を広げるという課題を設定する。そこで，a_1 と類似した性質をもつグループ（無限に多くの対象を含む）に対して一般化を試みる。
⑤ 先行研究と同様の手法では解決できない部分が出てくる。
⑥ 執筆者自身の知識や他の研究から，その課題部分への解決策を見つけ出す。
⑦ 論文を執筆し，投稿する。
⑧ 査読者からのリプライに基づき，論文を修正，再投稿する。

（2）研究過程から推測される研究者の学習過程

数学者は自身の関連領域に関する最新の結果を日々参照している。それは研究集会やセミナーを含む学会の場であったり，公刊されている学術雑誌であったりする。あるいは，査読付き論文としてオーソライズされていない論文でも，ウェブ上のデータベース（arXiv）にアップロードされているものが多数あり，多くの数学者がここの論文データを参照している（ポアンカレ予想を解決したペレルマンによる論文も，当初はここにアップロードされた）。この日々の活動によって，自分の研究に役立つ新たな結果がでていないか，といったことや，自分の研究が先を越されていないか，といったことを確認している。第 4 節で提示した研究の流れにおいて，少なくとも①，③，⑥がこの作業を含んでいる。特に①，③は研究課題を設定するうえで必要不可欠な作業であり，①はより広い範囲における課題の設定，③は具体的な課題の設定に必要である。しかし，最新の結果を参照したとしても，そこから直ちに研究課題が得られるわけではない。すなわち，②，④の作業を要する。これらは数学研究における方法論である。前述のように，②は予想に対する仮説演繹的なアプローチの一つであるし，④は一般化というもっとも正統的な方法の一つである。このような研究の方法論は，普通，論文や教科書に知識として明示されることはなく，研究者が自身の研究活動の中で次第に獲得していくものだと考えられる。これは，数学において何が価値のある成果といえるか，という判断の基準になるものである。すなわち，方法論への

習熟は数学研究における態度の形成と言い換えられうる。

数学的に価値がある課題を設定すること自体は簡単である。しかし，それが自身の手の届く範囲のものでなければ解決はできない。例えば「L 空間予想の解決」を課題とすれば，これは大変に価値のある研究ということになるが，解決することは非常に難しい。数学者は課題設定におけるどこかのタイミングで，この解決可能性について直感したり確信したりしている。この直感や確信はなにによってもたらされるのか，ということは本稿にとって関心のある問いであるが，これは個々の数学者の経験や技術，そして既有の知識に強く依存しているように感じる。対象論文の研究においては，執筆者は結び目理論の研究者であり，a_1 があるグループ$\{a_1, a_2, a_3, \dots\}$の一員であること，つまりそれらにはある点において類似性があることを熟知していた。また，デーン手術という方法にも習熟しており，$a_1, a_2, a_3, \dots$ がすべて「P である」という性質を満たすことも分かっていた。この他にも多くの要素があると考えられるが，それらの要素が総合的に直感や確信をもたらすのではないだろうか。

研究課題が設定され，具体的に問いに取り組んでいけば，おそらくほとんどの場合は解決が容易ではない課題（研究課題からみれば下位課題）に遭遇する。これは第 4 節で述べたように，先行研究が暗黙的に課題を抱えていたと考えれば当然である。また，この下位課題の突破こそが研究の新規性や独自性を保証することになる。対象論文においては，先行研究では現れなかった多様体のピース M_2（トーラス結び目の外部空間）の構造を明らかにしている（§4 : SA_{22}）。M_2 の順序構造の研究は 3 次元多様体論（幾何分野）の中では行われていなかったが，ここでは Navas による最近の研究（代数分野）を応用することで解決している。ここからも数学研究者が最新の結果を日々参照していることが窺えよう。以上に述べた研究者の学習過程は，今回の対象論文から推測されるものである。そこでは，学会で得た課題意識からスタートし，他の先行研究から具体的な問題を得ていった。しかし，数学研究者の研究活動のすべてがこのような課題の立て方であるとは限らないし，実際にはこれ以外の課題設定の仕方も多くあると考えられる。特に今回は，他者の研究からインスピレーションを得ているように見受けられるが，自分自身の以前の研究から，更なる問題を作成してそれを解決する，という方法も当然ありうる。

5　数学教師教育への応用可能性

以上の節では，数学の研究論文の読解を通して，その研究者の研究活動や学習過程を推定する，という作業を行った。本節では，そのような活動（論文の読解と研究活動の推定）が数学教師教育に応用可能かどうか，ということについて論ずる。

まず，数学という学問分野の特徴として，高度に細分化しているということがあげられる。したがって，最先端の結果を載せている研究論文を読むには，かなりの量の既有知識が必要である。しかも，単に事柄を知っているのみにとどまらず事柄間の関係や出自，使用上の価値もあわせて，使える形で修得されていなければならない。それゆえ，大学院レベルで扱われる程度の数学を学んでいない者にとって，数学の研究論文を読むことは，ほとんど不可能といってよい。したがって，学部レベルの教員養成課程（ゼロ免課程も含む）に所属している学生に対して，数学の研究論文をそのままの形で与え，読解させる，という活動は行えないと考えられる。

しかし，現在では既知ととらえられている数学の諸結果も，発見された当時は最先端の結果であったことは確かである。したがって，教科書で扱われているような基本的な定理や

概念なども,「過去の研究論文の結果」として考えることができる。このようにとらえてみると，本稿で行った作業と同型の作業が，結果の再発見という文脈で行えるのではないだろうか。

実際,現在の学校数学で行われていること，さらには学部レベルの数学で行われていることは，結果の再発見である。よって，本稿で行ったように，これらの結果に対して「どのような問いに対する答えとして，それが生まれたのか」という視点や「どのような文脈でその問いが生まれたのか」という視点を持つことは，数学科の教員として非常に重要なことである。なぜなら，このような視点を持たない限り「なぜこの内容を教えるのか」という問いに対する数学的な答えが見出せないからである。また，数学の授業においては，教えるべき内容が埋め込まれている状況を課題として設定することが望ましい。それはすなわち，教師主導で内容が与えられるような授業ではなく，その課題を解決するために自然と新たな概念や性質がつくられる（再発見される）ような授業である。このような授業をデザインする上でも，上記の視点が必要である。

以上より，教師教育への応用可能性という観点からは，本稿のような作業をそのまま適用することはできない。しかし，それと同型の作業を既知の結果の再発見という文脈で行うことは，数学科の教員にとって非常に有用である。その詳しい方法や効果については，今後研究されるべき課題であろう。

参考文献

M. Teragaito, *Left-orderability and exceptional Dehn surgery on twist knots*, Canad. Math. Bull. Vol. 56（2013）, 850–859.

S. Boyer, C. McA. Gordon, L. Watson, *On L–spaces and left-orderable fundamental groups*, Math. Ann. 356（2013）, 1213–1245.

A. Clay, T. Lidman, L. Watson, *Graph manifolds, left-orderability and amalgamation*, Algebr. Geom. Topol. 13（2013）, 2347–2368.

A. Navas, *A remarkable family of left-ordered groups: central extensions of Hecke groups*. J. Algebra. 328（2013）, 31–42.

著者

袴田 綾斗　広島大学大学院教育学研究科博士課程後期

寺垣内 政一　広島大学大学院教育学研究科

影山 和也　広島大学大学院教育学研究科